Strategien für Ableitungen und Beweise im KNS

Ableitung $A_1, \dots, A_n \vdash B$	Beweis $\vdash B$
Nur die vorgegebenen Prämissen $A_1, \dots, A_n$ dürfen unbeseitigt stehen bleiben. Am Ende müssen alle weiteren, hilfsweise eingeführten Prämissen beseitigt sein (durch $\neg E, \rightarrow E$)	Ein Beweis ist eine Ableitung ohne vorgegebene Prämissen. Keine der hilfsweise eingeführten Prämissen darf unbeseitigt stehen bleiben. Alle (Hilfs-)Prämissen müssen am Ende beseitigt sein (durch $\neg E, \rightarrow E$)

Strategien für Ableitungen und Beweise im KNS

- ➔ Arbeite von außen (d.h. von oben und unten) zur Mitte hin.
- ➔ Wende, wann immer möglich, auf $A \wedge B$, $A \rightarrow B$, $A \leftrightarrow B$ und $\neg\neg A$ die Beseitigungsregeln $\wedge B$, $\rightarrow B$, $\leftrightarrow B$, $\neg B$ an.
- ➔ Wenn $A \leftrightarrow B$ abgeleitet werden soll, leite nacheinander $A \rightarrow B$ und $B \rightarrow A$ ab.
- ➔ Wenn $A \rightarrow B$ abgeleitet werden soll, versuche es mit einer untergeordneten Ableitung mit der Hilfsprämisse A , unter der Du B ableitest, ggf. durch Wiederverwendung bereits abgeleiteter Aussagen.
- ➔ Wenn $\neg A$ abgeleitet werden soll, versuche es mit einer untergeordneten Ableitung unter der Hilfsprämisse A , unter der Du einen Widerspruch herbeiführst, ggf. durch Wiederverwendung bereits abgeleiteter Aussagen. Oft gilt dies auch für die Ableitung von A ; nimm dann $\neg A$ als Hilfsprämisse an und leite über einen Widerspruch $\neg\neg A$ und dann A ab.
- ➔ Bei einer Prämisse $A \vee B$ verwendet man in der Regel $\vee B$ oder DS, wenn es nicht einen anderen offensichtlichen Ableitungsweg gibt.
- ➔ Vorsicht bei der direkten Ableitung von $A \vee B$ mittels $\vee E$. Oft muss man den Weg über die Hilfsprämisse $\neg(A \vee B)$ und die Ableitung eines Widerspruchs unter dieser gehen ($\neg E$: $\neg\neg(A \vee B)$, $\neg B$: $A \vee B$).

Beispiele für Ableitungsstrategien

- (A) a. Wenn der Vorsitzende ein Einbrecher ist, dann ist der Schriftführer ein Trottel, wenn der Kassenswart ein Betrüger ist.
- b. Also: Wenn der Kassenswart ein Betrüger ist und der Schriftführer kein Trottel ist, dann ist der Vorsitzende kein Einbrecher.

- p - Der Vorsitzende ist ein Einbrecher.
 q - Der Schriftführer ist ein Trottel.
 r - Der Kassenswart ist ein Betrüger.

$$p \rightarrow (r \rightarrow q) \quad \vdash \quad r \wedge \neg q \rightarrow \neg p$$

(1)	__	$p \rightarrow (r \rightarrow q)$	Schritt 1	Pr	
(2)		__	$r \wedge \neg q$	H-Pr	
(3)			__	p	H-Pr
(4)				$p \rightarrow (r \rightarrow q)$	wh (1)
(5)				$r \rightarrow q$	$\rightarrow$ B (3), (4)
(6)				$r \wedge \neg q$	wh (2)
(7)				r	$\wedge$ B (6)
(8)				$\neg q$	$\wedge$ B (6)
(9)				q	$\rightarrow$ B (7), (5)
(10)				$\neg p$	$\neg$ E (3)(8)(9)
(11)				$r \wedge \neg q \rightarrow \neg p$	Schritt 2 $\rightarrow$ E (2) (10)

Beispiele für Ableitungsstrategien

(B) $\neg(p \rightarrow q) \quad \vdash \quad p \wedge \neg q$

(1)	$\underline{\quad}$	$\neg(p \rightarrow q)$	Pr	
(2)		$\underline{\quad}$	q	H-Pr
(3)		$\underline{\quad}$	p	H-Pr
(4)			q	wh (2)
(5)			$p \rightarrow q$	$\rightarrow$ E (3) (4)
(6)			$\neg(p \rightarrow q)$	wh1
(7)			$\neg q$	$\neg$ E (2) (5) (6)
(8)		$\underline{\quad}$	$\neg p$	H-Pr
(9)		$\underline{\quad}$	p	H-Pr
(10)		$\underline{\quad}$	$\neg q$	H-Pr
(11)			p	wh (9)
(12)			$\neg p$	wh (8)
(13)			$\neg\neg q$	$\neg$ E (10) (11) (12)
(14)			q	$\neg$ B (13)
(15)			$p \rightarrow q$	$\rightarrow$ E (9) (14)
(16)			$\neg(p \rightarrow q)$	wh (1)
(17)			$\neg\neg p$	$\neg$ E (8) (15) (16)
(18)			p	$\neg$ B (17)
(19)			$p \wedge \neg q$	$\wedge$ E(7)(18)